

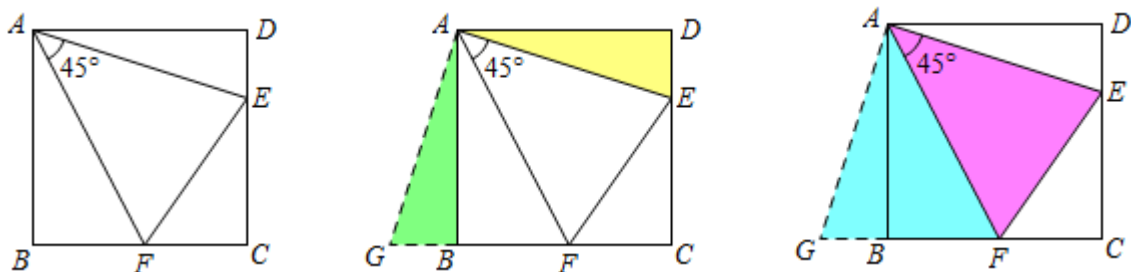
第3讲半角模型和悬挂模型

一、角含半角模型

1. 半角在倍角内

💡 锦囊妙计

如图，正方形 $ABCD$ ，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 BC 上， $\angle EOF = 45^\circ$ 。



【辅助线】延长 BC 至点 G ，使 $BG = DE$ ，连接 AG 。

【结论】

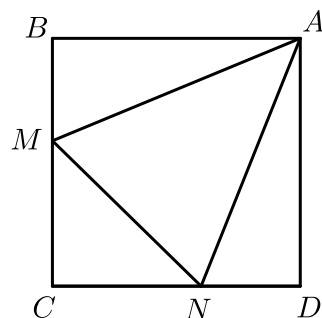
- ① 旋转全等： $\triangle ABG \cong \triangle ADE$ ，理由 **SAS**。
- ② 对称全等： $\triangle FAG \cong \triangle FAE$ ，理由 **SAS**。
- ③ $EF = BF + DE$ ，进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形周长的 **一半**。
- ④ AF 平分 $\angle BFE$ ， AE 平分 $\angle DEF$ 。
- ⑤ 过点 A 作 $AH \perp EF$ ，垂足为 H ，则 $AH = AB$ 。

【备注】注意辅助线描述不能够写旋转，要么写延长，要么写截取。

- ① 先找共顶点的等线段；
- ② 边怎么转，边所在三角形就怎么转。
因为是半角模型，还会有自己特殊的结论：
- ③ 先证明一次旋转全等（SAS）
- ④ 再寻找对称全等（SAS）

栗子1

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC = CD = DA$ ， $\angle BAD = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ，点 M 、 N 分别在边 BC 、 CD 上，且 $\angle MAN = 45^\circ$ ，若 $BM = 3$ ， $ND = 2$ ， MN 的长度为 _____。



【答案】 5

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD = DA$, $\angle BAD = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

如图, 旋转 $\triangle ABM$ 至 $\triangle ADP$ 位置,

$\therefore \angle PAM = \angle DAM + \angle MAB = 90^\circ$, $AP = AM$, $AN = AN$,

$\angle PAN = \angle PAM - \angle MAN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle MAN$,

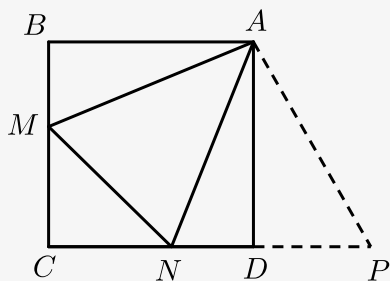
在 $\triangle PAN$ 和 $\triangle MAN$ 中,

$$\begin{cases} AM = AP \\ \angle PAN = \angle MAN, \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle PAN \cong \triangle MAN$ (SAS),

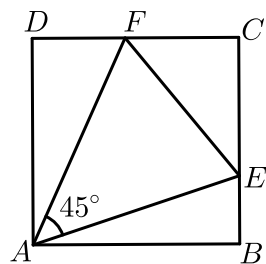
$\therefore MN = NP$,

$\therefore MN = PN = PD + DN = BM + DN = 3 + 2 = 5$.



【标注】 【知识点】 正方形中的半角模型

2. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点, $\angle EAF = 45^\circ$, $\triangle ECF$ 的周长为 4, 则正方形 $ABCD$ 的边长为 () .



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 A

【解析】 将 $\triangle DAF$ 绕点A顺时针旋转90度到 $\triangle BAF'$ 位置，

由题意可得出： $\triangle DAE \cong \triangle BAF'$ ，

$\therefore DF = BF'$ ， $\angle DAF = \angle BAF'$ ，

$\therefore \angle EAF' = 45^\circ$ ，

在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle EAF'$ 中，

$$\begin{cases} AF = AF' \\ \angle FAE = \angle EAF' \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle FAE \cong \triangle EAF'$ (SAS)，

$\therefore BF = EF'$ ，

$\therefore \triangle ECF$ 的周长为4，

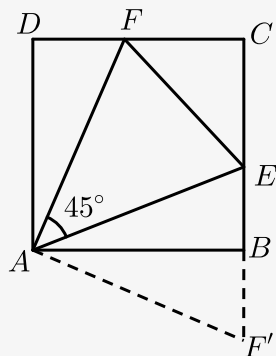
$\therefore EF + EC + FC = FC + CE + EF' = FC + BC + BF'$

$= DF + FC + BC = 4$ ，

$\therefore 2BC = 4$ ，

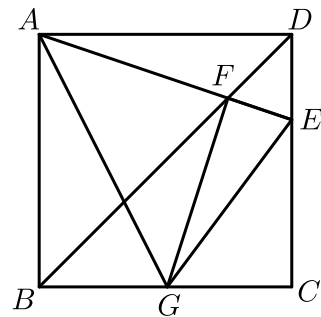
$\therefore BC = 2$ 。

故选：A。



【标注】 【知识点】 正方形中的半角模型

如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 CD 上一动，连接 AE 交对角线 BD 于点 F ，过点 F 作 $FG \perp AE$ 交 BC 于点 G ，连接 EG ，已知正方 $ABCD$ 边长为 4cm ，求 $\triangle ECG$ 的周长。



【备注】在利用角含半角模型之前，需要做辅助线证明 $\angle EAG$ 为 45°

【答案】 8cm .

【解析】如图，连接 CF ，

易证 $\triangle ABF \cong \triangle CBF$ (SAS)

$\therefore AF = CF$, $\angle BAF = \angle BCF$,

$\because FG \perp AE$,

$\therefore$ 在四边形 $ABGF$ 中 ,

$\angle BAF + \angle BGF = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$,

又 $\because \angle BGF + \angle CGF = 180^\circ$,

$\therefore \angle BAF = \angle CGF$,

$\therefore \angle CGF = \angle BCF$,

$\therefore CF = FG$,

$\therefore AF = FG$;

$\therefore \triangle AFG$ 是等腰直角三角形 ,

$\therefore \angle EAG = 45^\circ$,

把 $\triangle ADE$ 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABH$, 则 $AH = AE$, $BH = DE$,

$\angle BAH = \angle DAE$,

$\because AF = FG$, $FG \perp AE$,

$\therefore \angle HAG = \angle BAG + \angle DAE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

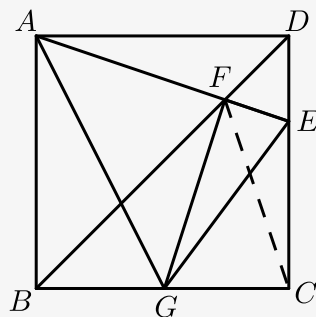
$\therefore \angle EAG = \angle HAG$,

$\therefore \triangle AHG \cong \triangle AEG$ (SAS) ,

$\therefore HG = EG$,

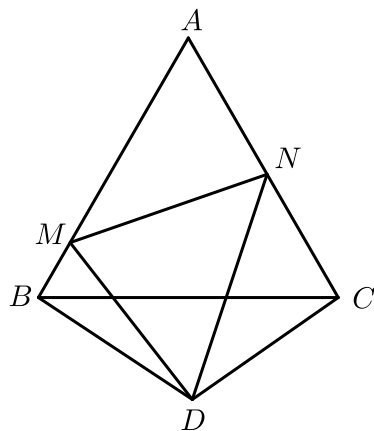
$\therefore HG = BH + BG = DE + BG$,

$\therefore C_{\triangle ECG} = EC + EG + CG = EC + BG + DE + CG = 2BC = 8\text{cm}$.



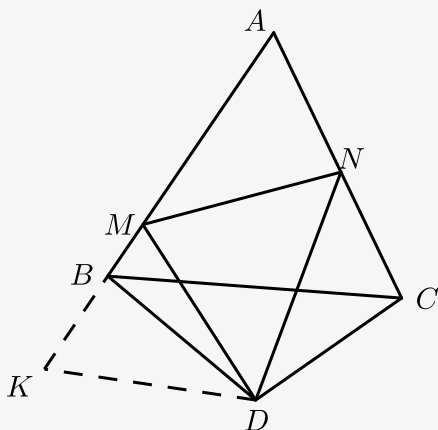
栗子2

4. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $\triangle BDC$ 是顶角 $\angle BDC = 120^\circ$ 的等腰三角形，以 D 为顶点作一个 60° 角，角的两边分别交 AB 、 AC 于 M 、 N ，连接 MN ，若 $S_{\triangle BMD} + S_{\triangle CND} = 10$ ，则 $S_{\triangle DMN} =$ _____ .



【答案】10

【解析】延长 AB 至 K ，使 $\angle KDN = \angle BDC = 120^\circ$ ，



$$\therefore \angle KDB = \angle NDC, \angle KDM = 60^\circ = \angle NDM.$$

$$\therefore \angle A + \angle BDC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ACD = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle ABD + \angle KBD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle KBD = \angle NCD.$$

在 $\triangle KBD$ 和 $\triangle NCD$ 中，

$$\begin{cases} \angle KBD = \angle NCD \\ BD = CD \\ \angle BDK = \angle CDN \end{cases},$$

$$\triangle KDB \cong \triangle NDC (\text{ASA}),$$

$$\therefore DK = DN.$$

在 $\triangle MDK$ 和 $\triangle MDN$ 中,

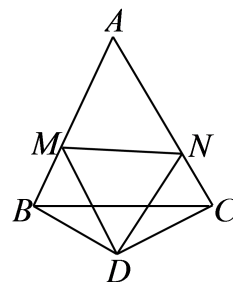
$$\begin{cases} DK = DN \\ \angle MDK = \angle MDN, \\ MD = MD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MDK \cong \triangle MDN (\text{SAS}).$$

$$\therefore S_{\triangle MDN} = S_{\triangle MDK} = S_{\triangle MDB} + S_{\triangle NCD} = 10.$$

【标注】【知识点】多边形中的半角模型

5. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形, $\triangle BDC$ 是等腰三角形, 且 $\angle BDC = 120^\circ$, 以 D 为顶点作一个 60° 角, 使其两边分别交 AB 于点 M , 交 AC 于点 N , 连接 MN , 则 $\triangle AMN$ 的周长是多少?



【答案】 6.

【解析】 $\because \triangle BDC$ 是等腰三角形, 且 $\angle BDC = 120^\circ$,

$$\therefore \angle DBC = \angle BCD = 30^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle DCA = 90^\circ,$$

延长 AB 至 F , 使 $BF = CN$, 连接 DF ,

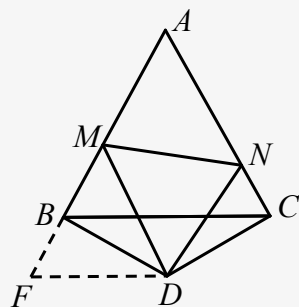
$$\therefore BF = CN, DB = DC,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDF \cong \text{Rt}\triangle CDN (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BDF = \angle CDN, DF = DN,$$

$$\therefore \angle MDN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDM + \angle CDN = 60^\circ,$$



$$\therefore \angle BDM + \angle BDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FDM = \angle MDN = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle DMN \cong \triangle DMF,$$

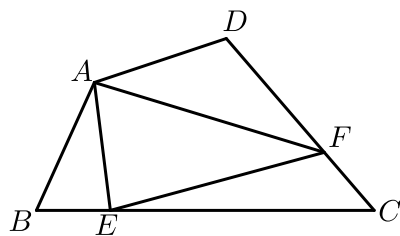
$$\therefore MN = MF,$$

$$\therefore \triangle AMN \text{的周长} = AM + AN + MN = AM + MB + BF + AN = AB + AC = 6$$

【标注】【知识点】旋转型全等

栗子3

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， $AB = AD$ 。E，F分别是线段 BC ， CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ 。若 $EF = 11$ ， $BE = 3$ ，则 $DF = \underline{\quad}$ 。



【答案】8

【解析】延长 CD 至 G 使 $DG = BE$ ，连接 AG 。

$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ, \therefore \angle B = \angle ADG,$$

$$\therefore AB = AD, \therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG (\text{SAS}),$$

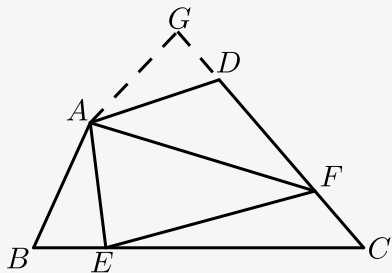
$$\therefore AG = AE, \angle BAE = \angle DAG,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAE + \angle EAD = \angle DAG + \angle EAD = \angle EAG,$$

$$\therefore \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} \angle EAG, \therefore \angle EAF = \angle GAF,$$

$$\text{又 } AF = AF, \therefore \triangle EAF \cong \triangle GAF (\text{SAS}),$$

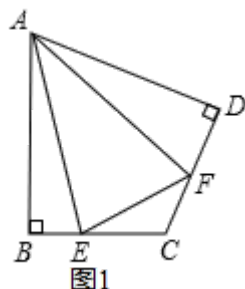
$$\therefore EF = GF, \therefore DF = GF - DG = EF - BE = 8.$$



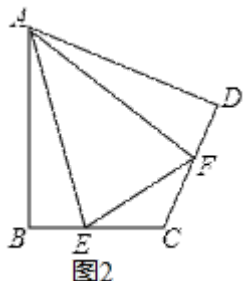
【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

7. 回答下列问题：

- (1) 如图1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$. 请直接写出线段 EF , BE , FD 之间的数量关系 _____ .



- (2) 如图2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$, (1)中的结论是否仍然成立? 请写出证明过程.



- (3) 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 所在直线上的点, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$. 请直接写出线段 EF , BE , FD 之间的数量关系 _____ .

【答案】 (1) $EF = BE + FD$

(2) (1)中的结论 $EF = BE + FD$ 仍然成立.

(3) $FD + BE = EF$ 或 $FD = BE + EF$ 或 $BE = FD + EF$

【解析】 (1) 如图1, 延长 EB 到 G , 使 $BG = DF$, 连接 AG .

$\therefore$ 在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle ADF$ 中,

$AB = AD$, $\angle ABG = \angle ADF = 90^\circ$, $BG = DF$.

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF$ (SAS)

$\therefore AG = AF$, $\angle 1 = \angle 2$.

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$.

$\therefore \angle GAE = \angle EAF$.

又 $AE = AE$,

易证 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$. (SAS),

$\therefore EG = EF$.

$$\therefore EG = BE + BG .$$

$$\therefore EF = BE + FD .$$

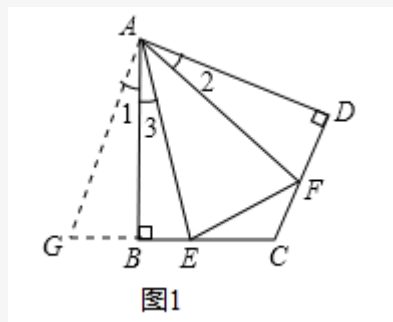


图1

(2) (1) 中的结论 $EF = BE + FD$ 仍然成立 .

证明：如图2，延长CB至M，使 $BM = DF$ ，

$$\because \angle ABC + \angle D = 180^\circ, \angle 1 + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle D,$$

在 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ADF$ 中，

$$AB = AD, \angle 1 = \angle D, BM = DF,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF (SAS) .$$

$$\therefore AF = AM, \angle 2 = \angle 3 .$$

$$\because \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 4 = \frac{1}{2} \angle BAD = \angle EAF .$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = \angle EAF, \text{ 即 } \angle MAE = \angle EAF .$$

在 $\triangle AME$ 与 $\triangle AFE$ 中，

$$AM = AF, \angle MAE = \angle EAF, AE = AE,$$

$$\therefore \triangle AME \cong \triangle AFE (SAS) .$$

$$\therefore EF = ME, \text{ 即 } EF = BE + BM .$$

$$\therefore EF = BE + DF .$$

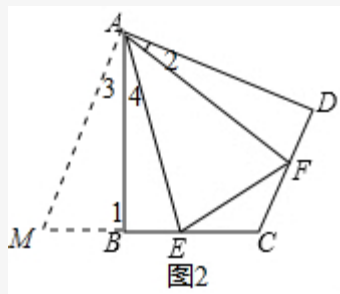


图2

(3) $FD + BE = EF$,

$$FD = BE + EF ,$$

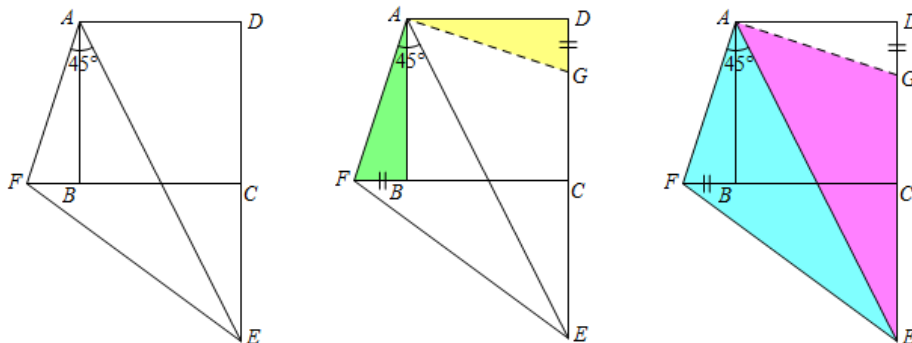
$$BE = FD + EF .$$

【标注】【题型】题型：对应边与角

2. 半角在倍角外

锦囊妙计

正方形 $ABCD$ ， $\angle EAF = 45^\circ$ ，旋转 $\angle EAF$ 与 DC 的延长线交于点 E ，与 CB 的延长线交于点 F 。



【辅助线】在 CD 截取 $DG = BF$ ，连接 AG 。

【结论】① 旋转全等： $\triangle ABF \cong \triangle ADG$ ，理由 **SAS**。

② 对称全等： $\triangle EAG \cong \triangle EAF$ ，理由 **SAS**。

③ $EF = DE - BF$ 。

④ AE 平分 $\angle DEF$ 。

栗子4

8. 通过类比联想，引申拓展研究典型题目，可达到解一类题的目的，下面是一个案例，请补充完整。

原题：如图1，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系。

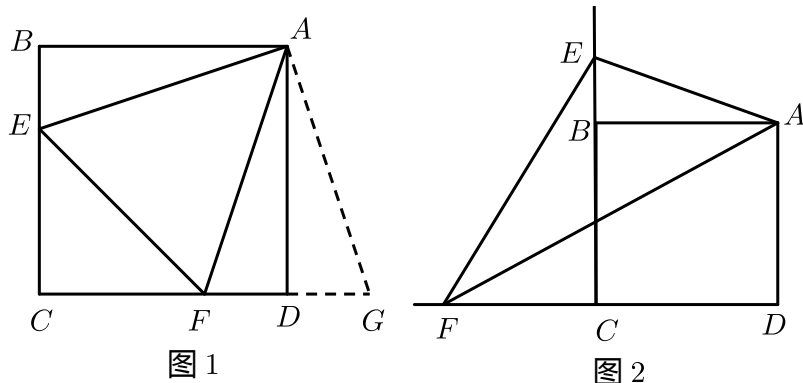


图 1

图 2

(1) 思路梳理

把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，可使 AB 与 AD 重合，由 $\angle ADG = \angle B = 90^\circ$ ，得 $\angle FDG = 180^\circ$ ，即点 F 、 D 、 G 共线，易证 $\triangle AFG$ _____，故 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为 _____。

(2) 类比引申

如图2，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CB 、 DC 的延长线上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为 _____，并给出证明。

【答案】 (1) $\triangle AFE$; $EF = BE + DF$

(2) $EF = DF - BE$

【解析】 (1) $\triangle AFG \cong \triangle AFE$, $EF = BE + DF$.

(2) $EF = DF - BE$.

如图，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° ，使 AB 与 AD 重合， E 点落在 T 点处，

由旋转知， $\angle EAB = \angle TAD$ ， $\angle EAT = 90^\circ$ ，

$EB = TD$ ， $EA = TA$ ，

$\therefore \angle FAT = 90^\circ - \angle BAF - \angle TAD$ ，

$\because \angle EAB = \angle TAD$ ，

$\therefore \angle FAT = 90^\circ - \angle BAF - \angle TAD$ ，

$= 90^\circ - \angle BAF - \angle EAB$ ，

$= 90^\circ - \angle EAF$ ，

$= 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

则在 $\triangle EAF$ 与 $\triangle TAF$ 中，

$$\begin{cases} EA = TA \\ \angle EAF = \angle TAF \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle EAF \cong \triangle TAF$ ，

$\therefore FT = FE$ ， $FT = FD - TD$ ， $TD = EB$ ，

$\therefore EF = DF - BE$ 。

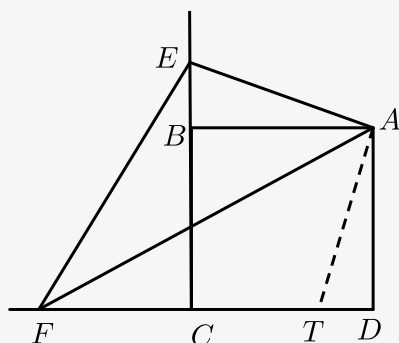
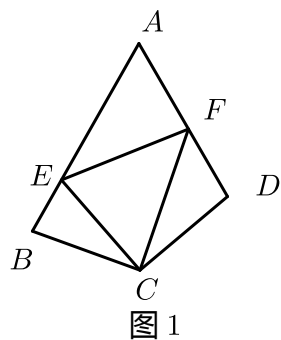


图2

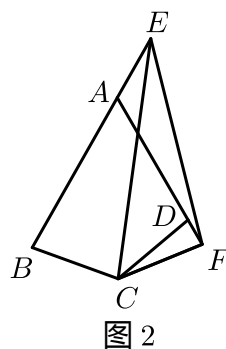
【标注】【知识点】正方形中的半角模型

9. 如图1，四边形 $ABCD$ 中， $BC = CD$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ， E 、 F 分别为 AB 、 AD 上的点， $\angle ECF = \angle A = 60^\circ$ 。

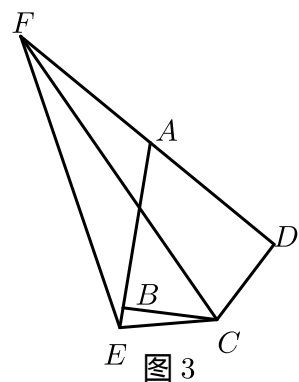


(1) 求证： $EF = BE + DF$.

(2) 如图2，将图1中点E移至BA延长线上，点F移至AD延长线上，其余条件不变，写出EF和BE，DF之间的数量关系并证明 .



(3) 如图3，将图1中点E移至AB延长线上，点F移至DA延长线上，其余条件不变，直接写出EF和BE，DF之间的数量关系为 _____ .



【答案】(1) 证明见解析 .

(2) $EF = BE - DF$, 证明见解析 .

(3) $EF = DF - BE$

【解析】(1) 如图，将 $\triangle BCE$ 绕点C顺时针旋转 120° 至 $\triangle DCE'$.

证明： $\because \angle A = 60^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle FDC = 180^\circ$.

又 $\because \angle B = \angle CDE'$,

$$\therefore \angle CDE' + \angle FDC = 180^\circ .$$

$\therefore F、D、E'$ 三点共线 ,

$$\text{又} \because \angle ECF = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle FCE' = 60^\circ .$$

在 $\triangle ECF$ 和 $\triangle E'CF$ 中 ,

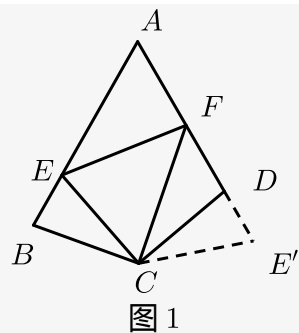
$$\therefore \begin{cases} FC = FC \\ \angle ECF = \angle E'CF = 60^\circ , \\ EC = E'C \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ECF \cong \triangle E'CF \text{ (SAS)} .$$

$$\therefore EF = DF + E'D ,$$

$$\text{又} \because E'D = BE ,$$

$$\therefore EF = BE + DF .$$



(2) 在 BA 上截取一点 F' , 使 $BF' = DF$,

$$\text{由 (1) 知} : \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle CDF = 180^\circ .$$

$$\therefore \angle CDF = \angle ABC .$$

在 $\triangle CBF'$ 和 $\triangle CDF$ 中 ,

$$\begin{cases} CB = CD \\ \angle CBF' = \angle CDF , \\ BF' = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CBF' \cong \triangle CDF \text{ (SAS)} .$$

$$\therefore CF' = CF , \text{ 且 } \angle BCF' = \angle DCF .$$

$$\text{又} \because \angle BCD = 120^\circ = \angle BCF' + \angle F'CD ,$$

$$\therefore \angle F'CF = \angle F'CD + \angle DCF = 120^\circ .$$

$$\text{又} \because \angle ECF = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle ECF' = 60^\circ .$$

在 $\triangle ECF'$ 和 $\triangle ECF$ 中 ,

$$\begin{cases} F'C = FC \\ \angle F'CE = \angle FCE = 60^\circ , \\ EC = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ECF' \cong \triangle ECF \text{ (SAS)} .$$

$$\therefore EF' = EF .$$

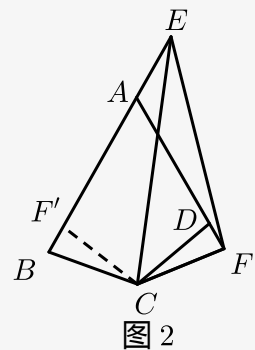
$$\text{又} \because EF' = BE - BF' , BF' = DF ,$$

$$\therefore EF = BE - DF .$$

故 $EF、BE、DF$ 的数量关系为 $EF = BE - DF$.

(3) $EF = DF - BE$.

证明 : 在 DF 上截取一点 E' , 使 $DE' = BE$, 连接 CE' .



由 (1) (2) 知: $\angle ABC + \angle D = 180^\circ$,

$\therefore \angle EBC + \angle ABC = 180^\circ$,

$\therefore \angle EBC = \angle E'DC$,

又 $\because BE = DE'$, $BC = DC$,

$\therefore \triangle BEC \cong \triangle DE'C$ (SAS) .

$\therefore CE = CE'$ 且 $\angle BCE = \angle DCE'$.

$\because \angle BCD = 120^\circ$, $\angle BCE = \angle DCE'$,

$\therefore \angle ECE' = 120^\circ$.

又 $\because \angle ECF = 60^\circ$,

$\therefore \angle E'CF = 60^\circ$.

在 $\triangle ECF$ 和 $\triangle E'CF$ 中,

$$\begin{cases} EC = E'C \\ \angle ECF = \angle E'CF = 60^\circ \\ FC = FC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ECF \cong \triangle E'CF$ (SAS) .

$\therefore EF = E'F = DF - DE'$,

又 $\because DE' = BE$,

$\therefore EF = DF - BE$.

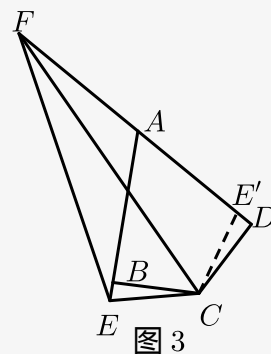


图 3

【标注】【知识点】截长补短

【知识点】SAS

【知识点】旋转的性质

【知识点】旋转性质综合应用

【能力】推理论证能力

10. 问题:

(1) 如图1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle D$, $AB = BC = CD$, 点 M , N 分别在 AD , CD 上, 若 $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$, 试探究线段 MN , AM , CN 有怎样的数量关系?

请直接写出你的猜想, 不用证明.

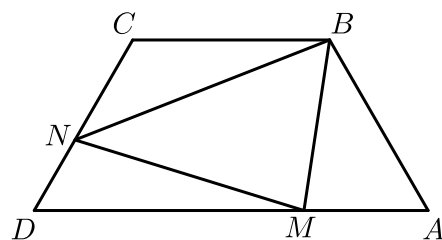
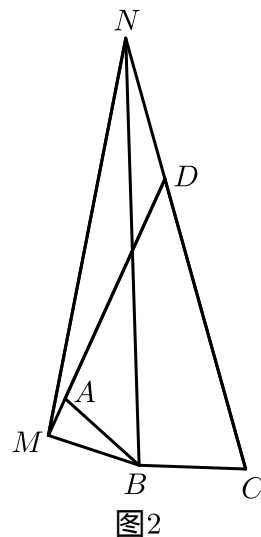


图 1

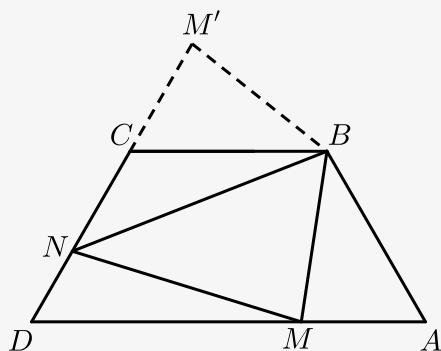
- (2) 如图2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, 点 M , N 分别在 DA , CD 的延长线上, 若 $\angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC$ 仍然成立, 请你进一步探究线段 MN , AM , CN 又有怎样的数量关系? 写出你的猜想, 并给予证明.



【答案】 (1) 猜想的结论: $MN = AM + CN$.

(2) 猜想的结论: $MN = CN - AM$.

【解析】 (1) 如图,



$\because BC \parallel AD$, $AB = BC = CD$,

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$\therefore \angle A + \angle BCD = 180^\circ$,

把 $\triangle ABM$ 绕点 B 顺时针旋转 $\angle BAC$ 度数到 $\triangle CBM'$ (或延长线段 DC , 并在延长上截取 $CM' = AM$, 连接 BM'),

则 $\triangle ABM \cong \triangle CBM'$,

$\therefore AM = CM'$, $BM = BM'$, $\angle A = \angle BCM'$, $\angle ABM = \angle M'BC$,

$\therefore \angle BCM' + \angle BCD = 180^\circ$,

$\therefore$ 点 M' 、 C 、 N 三点共线,

$$\therefore \angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC ,$$

$\therefore$

$$\angle M'BN = \angle M'BC + \angle CBN = \angle ABM + \angle CBN = \angle ABC - \angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$$

,

$$\therefore \angle MBN = \angle M'BN ,$$

在 $\triangle BMN$ 和 $\triangle BM'N$ 中 ,

$$\therefore \begin{cases} BM = BM' \\ \angle MBN = \angle M'BN , \\ BN = BN \end{cases}$$

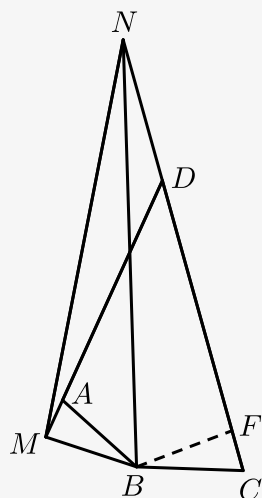
$$\therefore \triangle BMN \cong \triangle BM'N \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore MN = M'N ,$$

$$\text{又} \because M'N = CM' + CN = AM + CN ,$$

$$\therefore MN = AM + CN .$$

(2) 猜想的结论 : $MN = CN - AM$.



在 NC 截取 $CF = AM$, 连结 BF .

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle C = 180^\circ .$$

$$\text{又} \because \angle DAB + \angle MAB = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle MAB = \angle C .$$

$$\therefore AB = BC , AM = CF ,$$

$$\therefore \triangle AMB \cong \triangle CFB .$$

$$\therefore \angle ABM = \angle CBF , BM = BF .$$

$$\therefore \angle ABM + \angle ABF = \angle CBF + \angle ABF , \text{ 即 } \angle MBF = \angle ABC .$$

$$\therefore \angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC ,$$

$$\therefore \angle MBN = \frac{1}{2} \angle MBF , \text{ 即 } \angle MBN = \angle NBF .$$

又 $\because BN = BN, BM = BF,$

$\therefore \triangle MBN \cong \triangle FBN.$

$\therefore MN = NF.$

$\therefore NF = CN - CF,$

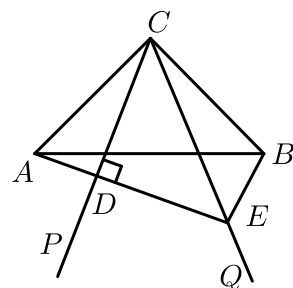
$\therefore MN = CN - AM.$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

独步天下

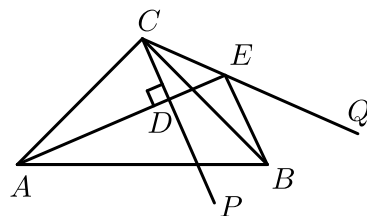
11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $\angle PCQ = 45^\circ$ ，把 $\angle PCQ$ 绕点 C 旋转，在整个旋转过程中，过点 A 作 $AD \perp CP$ ，垂足为 D ，直线 AD 交 CQ 于 E 。

(1) 如图①，当 $\angle PCQ$ 在 $\angle ACB$ 内部时，求证： $AD + BE = DE$ 。



图①

(2) 如图②，当 CQ 在 $\angle ACB$ 外部时，则线段 AD 、 BE 与 DE 的关系为 _____。



图②

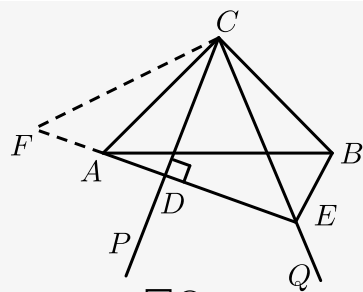
(3) 在(1)的条件下，若 $CD = 6$ ， $S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACD}$ ，求 AE 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $AD = BE + DE$

(3) $AE = 8$ 。

【解析】(1) 如图①，延长 DA 到 F ，使 $DF = DE$ ，

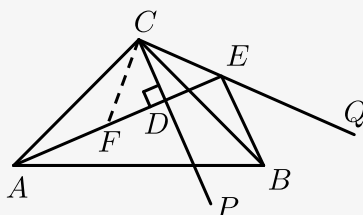


图①

$\because CD \perp AE$,
 $\therefore CE = CF$,
 $\therefore \angle DCE = \angle DCF = \angle PCQ = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ACD + \angle ACF = \angle DCF = 45^\circ$,
 又 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle PCQ = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ACF = \angle BCE$,
 $\therefore$ 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中 ,

$$\begin{cases} CE = CF \\ \angle ACF = \angle BCE \\ AC = BC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE$ (SAS) ,
 $\therefore AF = BE$,
 $\therefore AD + BE = AD + AF = DF = DE$,
 即 $AD + BE = DE$.

(2) 如图② , 在 AD 上截取 $DF = DE$,



图②

$\because CD \perp AE$,
 $\therefore CE = CF$,
 $\therefore \angle DCE = \angle DCF = \angle PCQ = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ECF = \angle DCE + \angle DCF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BCE + \angle BCF = \angle ECF = 90^\circ$,
 又 $\because \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ACF + \angle BCF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ACF = \angle BCE$,

$\therefore$ 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中 ,

$$\begin{cases} CE = CF \\ \angle ACF = \angle BCE , \\ AC = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE$ (SAS) ,

$\therefore AF = BE$,

$\therefore AD = AF + DF = BE + DE$,

即 $AD = BE + DE$,

故答案为 : $AD = BE + DE$.

(3) $\therefore \angle DCE = \angle DCF = \angle PCQ = 45^\circ$,

$\therefore \angle ECF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ECF$ 是等腰直角三角形 ,

$\therefore CD = DF = DE = 6$,

$\therefore S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACD}$,

$\therefore AF = 2AD$,

$\therefore AD = \frac{1}{1+2} \times 6 = 2$,

$\therefore AE = AD + DE = 2 + 6 = 8$.

【标注】【知识点】倍长 (类) 中线

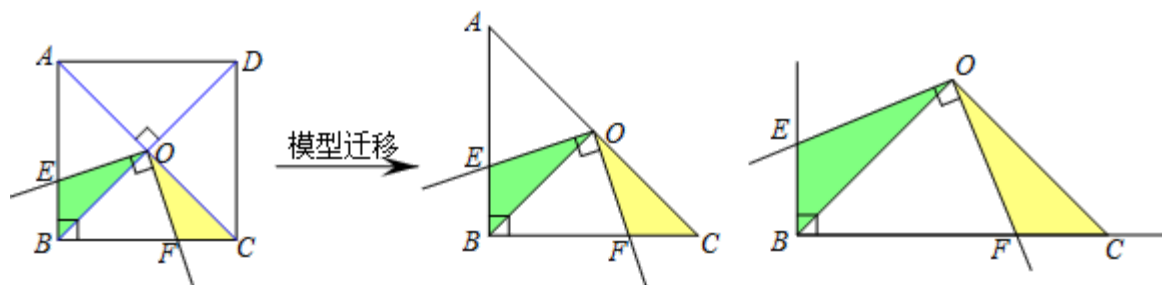
总结

模型	半角在倍角内	半角在倍角外
记忆	辅助线添加方法：“内补外截”	
已知	正方形ABCD，点E在边CD上，点F在边BC上， $\angle EOF = 45^\circ$ 。	正方形ABCD， $\angle EOF = 45^\circ$ ，旋转 $\angle EOF$ 与DC的延长线交于点E，与CB的延长线交于点F。
图形		
结论	① 旋转全等： $\triangle ABG \cong \triangle ADE$ (SAS) . ② 对称全等： $\triangle FAG \cong \triangle FAE$ (SAS) . ③ $EF = BF + DE$ ，进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形周长的一半 . ④ AF平分 $\angle BFE$ ，AE平分 $\angle DEF$.	① 旋转全等： $\triangle ABF \cong \triangle ADG$ (SAS) . ② 对称全等： $\triangle EAG \cong \triangle EAF$ (SAS) . ③ $EF = DE - BF$. ④ AE平分 $\angle DEF$.

二、悬挂模型

锦囊妙计

正方形ABCD，对角线AC、BD交于点O， $\angle EOF = 90^\circ$ ，与正方形的两边分别交于点E、F。

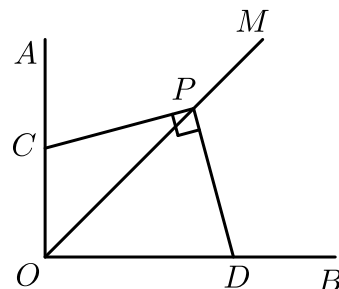


【结论】① $\triangle BOE \cong \triangle COF$ ， $\triangle AOE \cong \triangle BOF$.

② $OE = OF$ ，

③ $S_{\text{四边形OEBF}} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形ABCD}}$.

12. 如图, $\angle AOB = 90^\circ$, OM 平分 $\angle AOB$, 将直角三角板的顶点 P 在射线 OM 上移动, 两直角边分别与 OA , OB 相交于点 C , D , $PC = 3$, 则 $PD =$ _____.



【答案】 3

【解析】 在 OD 上截取 $OK = OC$, 连接 PK ,

$$\because \angle POC = \angle POK, OP = OP,$$

$$\therefore \triangle COP \cong \triangle KOP \text{ (SAS)},$$

$$\therefore PC = PK,$$

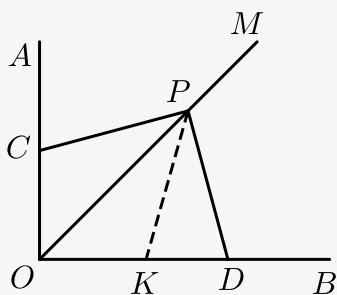
$$\because \angle COD = \angle CPD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCP + \angle ODP = 180^\circ,$$

$$\because \angle OCP = \angle OKP, \angle OKP + \angle PKD = 180^\circ,$$

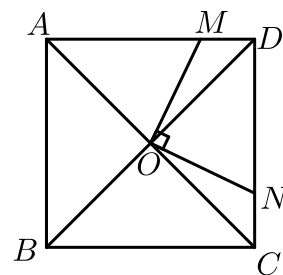
$$\therefore \angle PKD = \angle PDK,$$

$$\therefore PD = PK = PC = 3.$$



【标注】 【知识点】角分线有关的辅助线；对角互补模型

13. 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 O , M 是边 AD 上一点, 连接 OM , 过点 O 作 $ON \perp OM$, 交 CD 于点 N . 若四边形 $MOND$ 的面积是 1, 则 AB 的长为 ().



A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AC \perp BD$, $OC = OD$, $\angle OCD = \angle ODA = 45^\circ$,

$\therefore ON \perp OM$,

$\therefore \angle MON = 90^\circ$,

$\therefore \angle MON = \angle COD = 90^\circ$,

$\therefore \angle MON - \angle DON = \angle COD - \angle DON$,

$\therefore \angle MOD = \angle NOC$,

在 $\triangle OMD$ 和 $\triangle ONC$ 中,

$$\begin{cases} \angle MOD = \angle NOC \\ OD = OC \\ \angle ODM = \angle OCN \end{cases},$$

$\therefore \triangle OMD \cong \triangle ONC (ASA)$,

$\therefore S_{\triangle OMD} = S_{\triangle ONC}$,

$\therefore S_{\text{四边形}MOND} = S_{\triangle OMD} + S_{\triangle ODN}$

$= S_{\triangle ONC} + S_{\triangle ODN}$

$= S_{\triangle OCD}$

$= \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD}$

$= 1$,

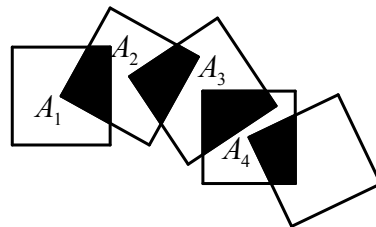
$\therefore S_{\text{正方形}ABCD} = AB^2 = 4$,

$\therefore AB = 2$.

故选: C.

【标注】【知识点】对角互补模型

14. 将5个边长为2cm的正方形按如图所示摆放, 点 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 是正方形的中心, 则这个正方形重叠部分的面积和为 () .



A. 2cm^2

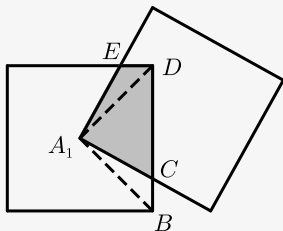
B. 1cm^2

C. 4cm^2

D. 6cm^2

【答案】C

【解析】



如图，连接 A_1B ， A_1D 。

$\because A_1$ 是正方形的中心，

$\therefore A_1D = A_1B$ ， $\angle DA_1B = 90^\circ$ ，

又 $\angle EA_1D + \angle DA_1C = \angle CA_1B + \angle DA_1C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EA_1D = \angle CA_1B$ ，

在 $\triangle A_1DE$ 和 $\triangle A_1BC$ 中，

$$\begin{cases} \angle A_1DE = \angle A_1BC = 45^\circ \\ A_1D = A_1B \\ \angle EA_1D = \angle CA_1B \end{cases},$$

$\therefore \triangle A_1DE \cong \triangle A_1BC$ (ASA)，

$\therefore S_{\triangle A_1DE} = S_{\triangle A_1BC}$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}A_1CDE} = S_{\triangle A_1BD}$ ，

故每两个正方形的重叠部分面积为正方形面积的 $\frac{1}{4}$ ，

$\therefore 5$ 个正方形重叠部分面积之和等于一个正方形面积，即为 4cm^2 ，

故选C。

【标注】【知识点】对角互补模型

栗子6

15. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点，两边 PE ， PF 分别交 AB ， AC 于点 E 、 F 。给出以下四个结论：

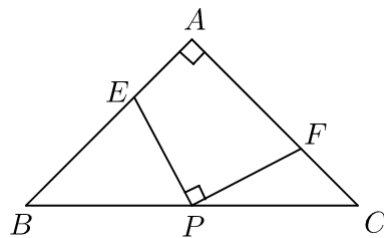
① $AE = CF$ ；

② $EF = AP$ ；

③ $\triangle EPF$ 是等腰直角三角形；

④ $S_{\text{四边形}AEPF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

上述结论始终正确的有() .



A. ①②③

B. ①③

C. ①③④

D. ①②③④

【答案】 C

【解析】 连接 AP 、 EF ,

$\because AB = AC$, $\angle A = 90^\circ$

,

$\therefore AP \perp BC$,

$\therefore \angle APC = 90^\circ$,

$\therefore \angle APF + \angle CPF = 90^\circ$,

$\therefore \angle EPF = \angle APE + \angle APF = 90^\circ$,

$\therefore \angle APE = \angle CPF$,

在等腰直角三角形 ABC 中 , $AP \perp BC$,

$\therefore \angle BAP = \angle CAP = \angle C = 45^\circ$, $AP = CP$,

在 $\triangle APE$ 和 $\triangle CPF$ 中 $\begin{cases} \angle BAP = \angle C = 45^\circ \\ AP = CP \\ \angle APE = \angle CPF \end{cases}$,

$\therefore \triangle APE \cong \triangle CPF$,

$\therefore S_{\triangle APE} = S_{\triangle CPF}$, $AE = CF$, $PE = PF$,

$\therefore \angle EPF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EPF$ 是等腰直角三角形 ,

即 : ①③正确 ,

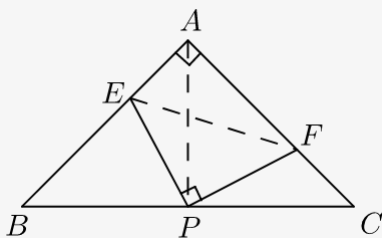
同理 : $\triangle APF \cong \triangle BPE$,

$\therefore S_{\triangle APF} = S_{\triangle BPE}$,

$\therefore S_{\text{四边形}AEPF} = S_{\triangle APE} + S_{\triangle APF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$,

即 : ④正确 ,

$\therefore \triangle EPF$ 是等腰直角三角形 ,



$$\therefore EF = \sqrt{2}PE,$$

当 $PE \perp AB$ 时, $AP = \sqrt{2}PE$, 而 PE 不一定垂直于 AB ,

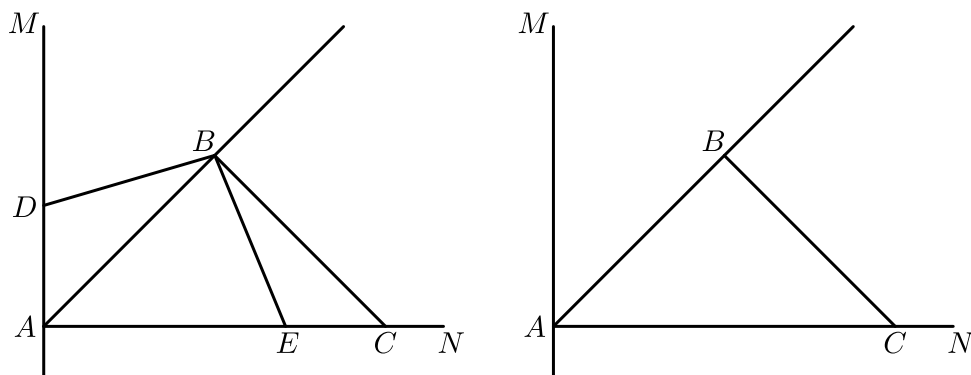
$\therefore AP$ 不一定等于 EF ,

$\therefore$ ②错误,

故选C.

【标注】【知识点】对角互补模型

16. 如图, 直线 $AM \perp AN$, AB 平分 $\angle MAN$, 过点 B 作 $BC \perp BA$ 交 AN 于点 C ; 动点 E 、 D 同时从 A 点出发, 其中动点 E 以 2cm/s 的速度沿射线 AN 方向运动, 动点 D 以 1cm/s 的速度运动; 已知 $AC = 6\text{cm}$, 设动点 D 、 E 的运动时间为 t .



- (1) 试求 $\angle ACB$ 的度数.
- (2) 当点 D 在射线 AM 上运动时满足 $S_{\triangle ADB} : S_{\triangle BEC} = 2 : 3$, 试求点 D 、 E 的运动时间 t 的值.
- (3) 当动点 D 在直线 AM 上运动, E 在射线 AN 运动过程中, 是否存在某个时间 t , 使得 $\triangle ADB$ 与 $\triangle BEC$ 全等? 若存在, 请求出时间 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $\angle ACB = 45^\circ$.

(2) $\frac{12}{7}\text{s}$ 或 12s .

(3) 存在, $t = 2\text{s}$ 或 6s .

【解析】(1) $\because AM \perp AN$, AB 平分 $\angle MAN$,

$$\therefore \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\because BC \perp BA,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ.$$

(2) 作 $BF \perp AM$ 于点 F , $BG \perp AC$ 于点 G ,

$$\text{则 } BF = BG,$$

$$\because S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BEC} = 2 : 3 ,$$

①当点E在C点左侧时 ,

$$AD : CE = 2 : 3 ,$$

$$\because AD = t , CE = 6 - 2t ,$$

$$\therefore 3t = 2(6 - 2t) ,$$

$$\text{解得 } t = \frac{12}{7} .$$

②当点E在点C右侧时 , $CE = 2t - 6$

$$\therefore 3t = 2(2t - 6) ,$$

$$\text{解得 } t = 12 .$$

$$\therefore t \text{ 的值为 } \frac{12}{7} \text{ s 或 } 12 \text{ s} .$$

(3) $\because AB = BC , \angle BAM = \angle BCA = 45^\circ ,$

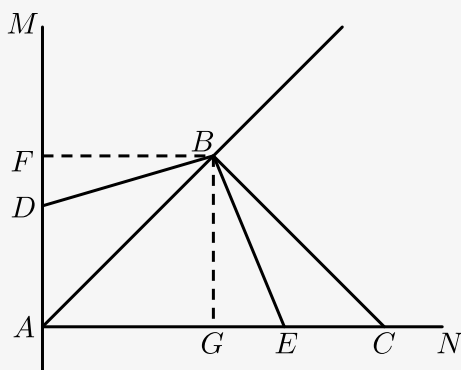
$\therefore AD = CE$, 即可证明 $\triangle ADB \cong \triangle ECB$ (SAS) ,

$$\therefore 6 - 2t = t ,$$

$$\text{解得 } t = 2 .$$

当D向下运动时 , 应满足 $t = 2t - 6$, 此时 $t = 6$.

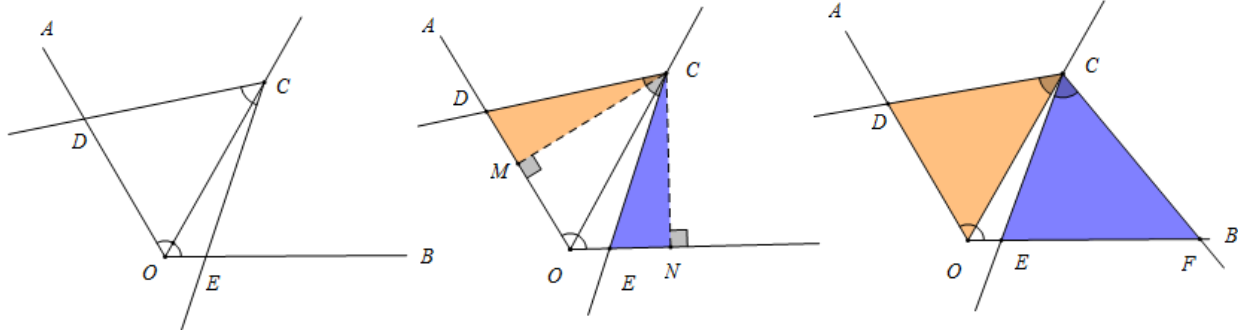
$$\therefore t = 2 \text{ s 或 } 6 \text{ s} .$$



【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

锦囊妙计

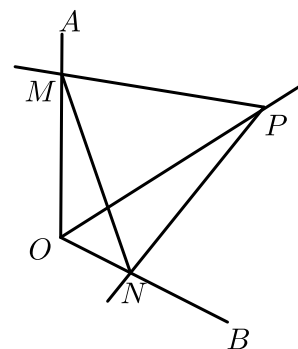
【变式模型】



栗子7

17. 如图 , 点P为定角 $\angle AOB$ 的平分线上的一个定点 , 且 $\angle MPN$ 与 $\angle AOB$ 互补 , 若 $\angle MPN$ 在绕点P旋转的过程中 , 其两边分别与OA、OB相交于M、N两点 , 则以下结论 : (1) $PM = PN$ 恒成

立. (2) $OM + ON$ 的值不变. (3) 四边形 $PMON$ 的面积不变. (4) MN 的长不变, 其中正确的个数为 ().



A. 4

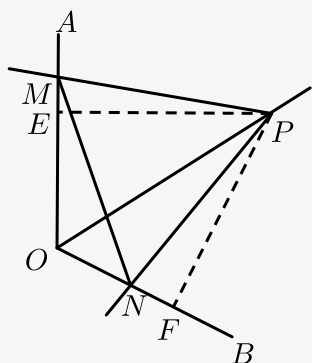
B. 3

C. 2

D. 1

【答案】 B

【解析】 如图, 作 $PE \perp OA$ 于 E , $PF \perp OB$ 于 F .



$$\therefore \angle PEO = \angle PFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF = \angle MPN,$$

$$\therefore \angle EPM = \angle FPN,$$

$$\therefore OP \text{ 平分 } \angle AOB, PE \perp OA \text{ 于 } E, PF \perp OB \text{ 于 } F,$$

$$\therefore PE = PF,$$

在 $\text{Rt}\triangle POE$ 和 $\text{Rt}\triangle POF$ 中,

$$\begin{cases} OP = OP \\ PE = PF \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle POE \cong \text{Rt}\triangle POF (\text{HL}),$$

$$\therefore OE = OF,$$

在 $\triangle PEM$ 和 $\triangle PFN$ 中,

$$\begin{cases} \angle MPE = \angle NPF \\ PE = PF \\ \angle PEM = \angle PFN \end{cases},$$

$\therefore \triangle PEM \cong \triangle PFN (ASA),$

$\therefore EM = NF, PM = PN,$ 故 (1) 正确;

$\therefore S_{\triangle PEM} = S_{\triangle PNF},$

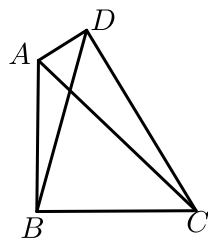
$\therefore S_{\text{四边形}PMON} = S_{\text{四边形}PEOF},$ 为定值, 故 (3) 正确;

$\therefore OM + ON = OE + ME + OF - NF = 2OE,$ 为定值, 故 (2) 正确;

MN 的长度是变化的, 故 (4) 错误.

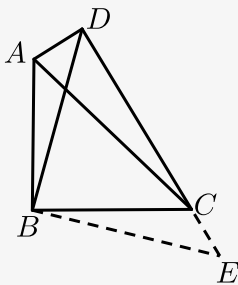
【标注】【知识点】对角互补模型

18. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, AB = CB, \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ,$ 连接 $BD, AC, BD = 7\text{cm},$ 则 $S_{\text{四边形}ABCD}$ 的面积为 _____.



【答案】 $\frac{49}{2}\text{cm}^2$

【解析】 如图, 延长 DC 至 E , 使 $CE = AD$, 连接 BE .



$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ, \angle BCD + \angle BCE = 180^\circ,$

$\therefore \angle BAD = \angle BCE,$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBE$ 中,

$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle BAD = \angle BCE \\ AD = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBE (SAS),$

$\therefore BD = BE, S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBE}, \angle ABD = \angle CBE,$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE + \angle DBC = 90^\circ, \text{ 即 } \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BE = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 = \frac{49}{2} (\text{cm}^2),$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC} = S_{\triangle CBE} + S_{\triangle BDC} = S_{\triangle BDE} = \frac{49}{2} \text{cm}^2.$$

$$\text{故答案为: } \frac{49}{2} \text{cm}^2.$$

【标注】【知识点】对角互补模型

栗子8

19. 已知 $\angle MAN = 120^\circ$, AC 平分 $\angle MAN$.

(1) 在图1中, 若 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 求证: $AB = AD$.

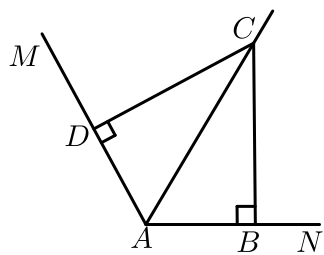


图1

(2) 在图2中, 若 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, 求证: $AB + AD = AC$.

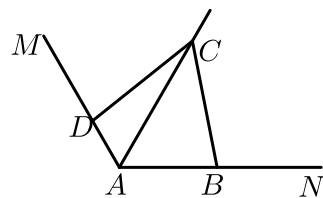


图2

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $\because AC$ 平分 $\angle MAN$,

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC,$$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ \\ \angle DAC = \angle BAC \\ AC = AC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = AB.$$

(2) 过 C 作 $CE \perp AN$ 于 E , $CF \perp AM$ 于 F ,

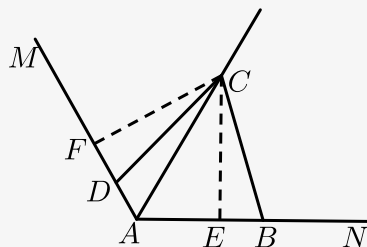


图2

$\therefore AC$ 平分 $\angle MAN$,

$\therefore CF = CE$, $\angle CAB = \angle CAF = 60^\circ$,

$\therefore AE = AF = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$,

$\therefore \angle DCB = 60^\circ$,

$\therefore \angle FCE = 180^\circ - \angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore \angle FCE = \angle BCD$,

$\therefore \angle FCD + \angle DCE = \angle FCE$, $\angle BCE + \angle DCE = \angle BCD$,

$\therefore \angle FCD = \angle BCE$,

在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle CBE$ 中,

$$\begin{cases} \angle FCD = \angle BCE \\ CF = CE \\ \angle CFD = \angle CEB = 90^\circ \end{cases},$$

$\therefore \triangle CDF \cong \triangle CBE (ASA)$,

$\therefore BE = DF$,

$\therefore AD + AB = AD + AE + BE = AD + DF + AE = AE + AF$,

$\therefore AC = AE + AF$,

$\therefore AD + AB = AC$.

【标注】【知识点】AAS

20. 回答下列各题.

(1) 如图1, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, AC 平分 $\angle BAD$, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E . 求证: $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$.

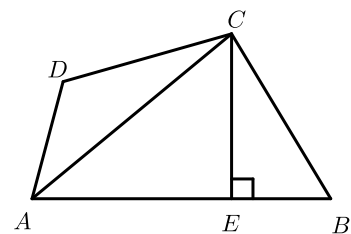


图1

(2) 如图2, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle BAD$, $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E . 求证:

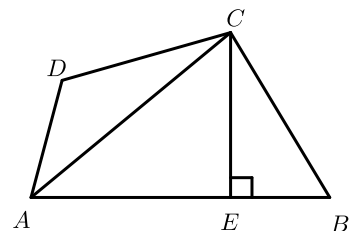


图2

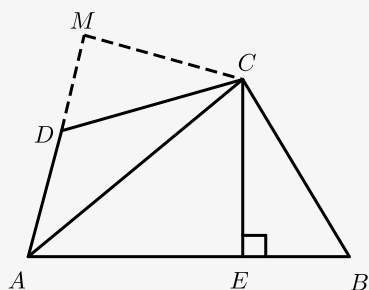
- ① $CD = CB$.
- ② $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) ① 证明见解析.

② 证明见解析.

【解析】(1) 过 C 作 $CM \perp AD$ 于 M .



$\because CE \perp AB$,

$\therefore \angle M = \angle CEB = 90^\circ$.

$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle ADC + \angle MDC = 180^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle MDC$.

$\because AC$ 平分 $\angle BAD$, $CM \perp AD$, $CE \perp AB$,

$\therefore CM = CE$, $\angle MAC = \angle EAC$,

在 $\triangle MAC$ 和 $\triangle EAC$ 中,

$$\begin{cases} \angle MAC = \angle EAC \\ \angle M = \angle AEC = 90^\circ, \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MAC \cong \triangle EAC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AM = AE.$$

$\therefore$ 在 $\triangle DMC$ 和 $\triangle BEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle MDC = \angle B \\ \angle M = \angle CEB = 90^\circ, \\ CM = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DMC \cong \triangle BEC (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = DM.$$

$$\therefore AB + AD$$

$$= AE + BE + AD$$

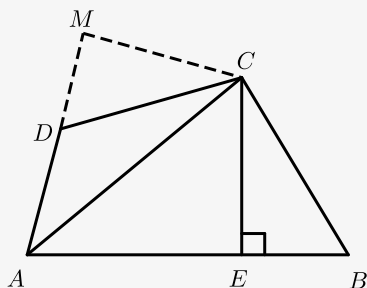
$$= AE + DM + AD$$

$$= 2AM$$

$$= 2AE.$$

$$\text{即 } AE = \frac{1}{2}(AB + AD).$$

(2) ① 过 C 作 $CM \perp AD$ 于 M ,



$\therefore AC$ 平分 $\angle BAD$,

$$\therefore \angle MAC = \angle EAC.$$

在 $\triangle MAC$ 和 $\triangle EAC$ 中,

$$\begin{cases} \angle MAC = \angle EAC \\ \angle M = \angle AEC = 90^\circ, \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MAC \cong \triangle EAC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AM = AE.$$

$$\therefore AB + AD = 2AE,$$

$$\therefore AE + BE + AD = 2AE.$$

$$\therefore BE + AD = AE,$$

$$\therefore BE + AD = AM,$$

$$\therefore BE + AD = AD + DM,$$

$$\therefore BE = DM ,$$

在 $\triangle CMD$ 和 $\triangle CEB$ 中 ,

$$\begin{cases} MC = CE \\ \angle M = \angle CEB , \\ DM = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CMD \cong \triangle CEB (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore CD = CB .$$

$$\textcircled{2} \text{ 由}\textcircled{1}\text{得} CD = CB , \angle ABC = \angle CDM ,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle CDM = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ .$$

【标注】【知识点】对角互补模型